Preuve : cas où f est strictement croissante sur I

Soient $(y_1, y_2) \in (f(I))^2$ tel que $y_1 < y_2$. On pose $x_1 = f(y_1), x_2 = f(y_2)$

$y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

L'implication du milieu vient du fait que f est croissante donc $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ or si on prend la contraposé on a $f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow x_2 \leq x_1$.

b) Continuité

Lemme : Soit $f \in C_m(I)$. $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue sur I.

Preuve : cela vient du fais que l'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Propriété : Si $f \in C_m(I)$ alors f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Preuve (à faire) :

f est continue et strictement monotone sur I donc f est bijective de I sur $f(I)$.

f continue implique $J = f(I)$ est un intervalle, or f^{-1} existe et est strictment monotone d'où $f^{-1}(J) = I$, intervalle, ce qui entraine f^{-1} continue.

Exemple : $f : \left(\begin{array}{c} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin x \end{array} \right)$

c) Dérivabilité

Theoreme : Soit $f \in C_m(I)$ et $x_o \in I$ tel que f soit derivable en x_o et $f'(x_o) \neq 0$ Alors f^{-1} est dérivable en $y_o = f(x_o)$ et on a

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

Remarque : il se peut que f ne soit pas derivable en un point et que f^{-1} le soit. Sur le graphe , f aura une tangente verticale, et donc f^{-1} une tangente horizontale.

Preuve (du theoreme) :

Montrons que $\lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \frac{1}{f'(x_o)}, f'(x_o) \neq 0$

La fonction f étant dérivable en x_o, on a $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, comme f^{-1} est continue en y_o, le théoreme de compositions de limites donne :